

Probabilités L3 SG, 2021
Université de Picardie Jules Verne



Cours de probabilités 7

Compléments sur les calculs de lois

Rappel. Changement de variable dans $\mathbb{R}^d$. Soit $\phi: U \rightarrow V$ difféo entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$,

$$\int_V f(v) dv = \int_U f \circ \phi(u) |J(\phi)(u)| du, \quad \forall f \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}^d)$$

$\hookrightarrow \det \text{ jacobien}$

$$(J(\phi^{-1})(\phi(u))) = (J(\phi)(u))^{-1}$$

Déf.. (vecteur aléatoire) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé

On appelle vecteur aléatoire toute v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

$\Rightarrow X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur aléatoire ssi $\forall k=1, \dots, d$, X_k est une v.a.r.

On appelle $p_{x_1}, \dots, p_{x_d}$ les lois marginales de X

Prop. X vecteur aléatoire de densité q . Alors X_k a pm densité

$$q_k(u) = \int q(x_1, \dots, x_{k-1}, u, x_{k+1}, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_d$$

exemple. pm $d = 2$, $\phi \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R})$,

$$E(\phi(x_1)) = \iint \phi(x_1) q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int \phi(x_1) \underbrace{\left(\int q(x_1, x_2) dx_2 \right)}_{q_1(x_1)} dx_1$$

Prop. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ vect aléatoire de densité q

Les composantes $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes

sr. $q(x_1, \dots, x_d) = q_1(x_1) \cdot q_d(x_d) \quad \text{p.p.}$

sr. $q(x_1, \dots, x_d) = g_1(x_1) \cdot g_d(x_d) \quad \text{p.p.}$, pour certaines fonctions $g_1, \dots, g_d \geq 0$

et donc X_k a pour densité $q_k(u) = \frac{g_k(u)}{\int_{\mathbb{R}} g_k(v) dv}$

Def. (produit de convolution)

Soient P_1, P_2 deux probas sur $\mathbb{R}^d$. Il existe une unique probabilité, $P_1 * P_2$, tq

$$\iint h(x+y) dP_1(x) dP_2(y) = \int h(x) d(P_1 * P_2)(x), \quad \forall h \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}^d)$$

Propriété si $P_1 = f_1 \lambda$, $P_2 = f_2 \lambda$ sont à densité, alors
 $\hookrightarrow$ les f_i sont des densités sur $\mathbb{R}^d$

$$P_1 * P_2 = (f_1 * f_2) \lambda, \text{ où}$$

$$f_1 * f_2(x) = \int f_1(x-y) f_2(y) dy, \quad \forall x$$

dém

$$\iint h(x+y) f_1(x) f_2(y) dx dy = \int \left(\int h(\overset{z}{x+y}) \overset{z-y}{f_1(x)} \overset{dz}{dx} \right) f_2(y) dy$$

$$= \int h(z) \left[\int f_1(z-y) f_2(y) dy \right] dz = \int h(z) d(P_1 * P_2)(z), \quad \forall h \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}^d)$$

$$\Rightarrow P_1 * P_2 \text{ est à densité } f_1 * f_2 \cdot x \mapsto \int f_1(x-y) f_2(y) dy \quad \blacksquare$$

Prop. Soient X_1, X_2 deux v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indép., de densité f_1, f_2 .
 Alors la v.a $S = X_1 + X_2$ a pm densité $g = f_1 * f_2$.

dém. $\forall h \in C_k^+$,

$$\begin{aligned} E(h(S)) &= \iint h(x+y) f_1(x) f_2(y) dx dy = \int \left(\int \overbrace{h(x+y)}^z f_1(\overbrace{x}^{z-y}) dx \right) f_2(y) dy \\ &= \int h(z) \underbrace{\left(\int f_1(z-y) f_2(y) dy \right)}_{f_1 * f_2(z)} dz. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple . Soient X_1, X_2 deux v.a.r. indép. de même loi uniforme sur $[0,1]$

Quelle est la loi de $S = X_1 + X_2$?

on sait que S est à densité

$$g : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) dy$$

$$= \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y) dy = \int_0^1 \mathbb{1}_{[x-1, x]}(y) dy$$

$$(0 \leq x-y \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq y \leq x)$$

$$\text{Si } x \in [0,1], g(x) = x$$

$$\text{Si } x \in [1,2], g(x) = 1 - (x-1) = 2 - x$$

$$\text{Si non, } \forall y \in [0,1], y \notin [x-1, x] \text{ donc } g(x) = 0$$

Prop. Soit (X, Y) un couple de v.a.n. indép de loi uniforme sur $[0, 1]$.

$$\text{On pose } U = \sqrt{-2 \log X} \cos(2\pi Y) \\ V = \sqrt{-2 \log X} \sin(2\pi Y)$$

Alors les v.a. U, V sont indép de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$

dém. Soit $\psi : (x, y) \mapsto \left(u = \sqrt{-2 \log x} \cos(2\pi y), v = \sqrt{-2 \log x} \sin(2\pi y) \right)$

on ψ est un difféo. de $D =]0, 1[\times]0, 1[$ sur $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$

$$\text{On a } J(\psi)(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{x} \times \frac{1}{\sqrt{-2 \log x}} \cos(2\pi y) & \sqrt{-2 \log x} (-2\pi) \sin 2\pi y \\ -\frac{2}{x} \times \frac{1}{\sqrt{-2 \log x}} \sin(2\pi y) & \sqrt{-2 \log x} 2\pi \cos 2\pi y \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2\pi}{x} \cos^2(2\pi y) - \frac{2\pi}{x} \sin^2(2\pi y) = -\frac{2\pi}{x}$$

et donc $\phi = \psi^{-1}$ a $J(\phi)(u, v) = \left(J(\psi)(\psi^{-1}(u, v)) \right)^{-1} = \left(-\frac{2\pi}{x(u, v)} \right)^{-1}$

Comme $u^2 + v^2 = -2 \log x$ on a $|J(\phi)(u, v)| = \frac{e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}}}{2\pi}$
 $(\leadsto x = e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}})$

d'où $\forall h \in C_k^+$,

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{[0,1]^2 \\ \neq D}} \underbrace{h \circ \phi}_{h(u, v)}(x, y) \, dx \, dy &= \iint_{\Delta} h(u, v) |J(\phi)(u, v)| \, du \, dv \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} h(u, v) \left[\mathbb{1}_{\Delta}(u, v) \frac{e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}}}{2\pi} \right] \, du \, dv \end{aligned}$$

On conclut que $(U, V) = \psi(X, Y)$ a pour densité

$$\frac{1}{2\pi} e^{-u \frac{u^2 + v^2}{2}} \mathbb{1}_{\Delta}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} \quad \text{pp} \quad \left(\begin{array}{l} \text{la mesure de} \\ \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \text{ est nulle} \end{array} \right)$$

Exemple. (X, Y) couple de v.a. n. de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$, indép

On pose $T = \frac{Y}{X}$ ($\mathbb{P}(X=0)=0$) Loi de T ?

$$\sim \text{Soit } \gamma: (x, y) \mapsto \left(t = \frac{y}{x}, u = x \right)$$

C' est un difféo de $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \Delta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$$\text{On a } \begin{cases} x = u \\ y = tu \end{cases} \quad \text{et} \quad J(\gamma)(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}$$

donc par $\phi = \gamma^{-1}$,

$$J(\phi)(t,u) = \underbrace{\left(J(\gamma)(\gamma^{-1}(t,u)) \right)^{-1}}_{-\frac{1}{x(t,u)} = -\frac{1}{u}} = -u$$

$\forall h \in C_k^+$, on a

$$E(h(T)) = \frac{1}{2\pi} \iint h\left(\frac{y}{x}\right) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int h(t) e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)u^2} |J(\phi)(t,u)| dt du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} h(t) e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)u^2} |u| dt du$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(t) \left[\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)u^2} u \, du \right] dt$$

$$\left[-\frac{e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)u^2}}{[1+t^2]} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+t^2}$$

donc T a pour densité $q: t \mapsto \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2}$.

Autre méthode on passe en plans.

$$E(h(T)) = \frac{1}{2\pi} \iint h\left(\frac{y}{x}\right) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} h(\tan \theta) e^{-\frac{1}{2}r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(\underbrace{\tan \theta}_w) d\theta \quad \underbrace{\left[-e^{-\frac{1}{2}w^2} \right]_0^{+\infty}}_1$$

$$w = \tan \theta$$

$$dw = (1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$$d\theta = \frac{dw}{1+w^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} h(w) \frac{1}{1+w^2} dw$$

Déf (du gamma)

On définit la fonction gamma par : pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\left(\begin{array}{cc} x^{\alpha-1} & e^{-x} \\ (\alpha-1)x^{\alpha-2} & -e^{-x} \end{array} \right) \xrightarrow{-f} -e^{-x}$$

Par l'IP on voit que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, et $\Gamma(1) = 1$

$$\leadsto \Gamma(n+1) = n!, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (0! = 1)$$

Le changement de var $x \mapsto \theta x$ m.g

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \theta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité, appelée loi gamma de paramètre d'échelle θ

et d'indice α , notée $\Gamma(\alpha, \theta)$

$\leadsto \Gamma(1, \theta)$ est la loi exp de param θ

$\leadsto$ Si X est une v.a. n de loi $\Gamma(\alpha, \theta)$, alors

$$\forall \beta > -\alpha, E(X^\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{1}{\theta^\beta}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{\alpha}{\theta}$$

$$V(X) = \frac{\alpha}{\theta^2}$$

Exemple. Si $X = (U, V)$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$, avec U, V indép de lois $\Gamma(\alpha, \theta), \Gamma(\beta, \theta)$ Quelle est la loi de $Y = \frac{U}{U+V}$?

Comme la dimension de Y est plus petite que celle de X ($1 < 2$) on "complète" Y , par ex., $Y' = (Y, Z)$ avec $Z = U+V$

on $\psi: (u, v) \mapsto \left(\frac{u}{u+v} = y, u+v = z \right)$ est b.j. de $D =]0, +\infty[^2$ dans $\Delta =]0, 1[\times]0, +\infty[$

et $\phi = \psi^{-1}: (y, z) \mapsto (yz, z(1-y))$

à jacobien

$$\begin{vmatrix} z & y \\ -z & 1-y \end{vmatrix} = z$$

For $h \in C_k^+$, on a

$$E(h(x)) = \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{h(u,v)}_{h \circ \phi(y,z)} \underbrace{\left[\frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\overset{yz}{\alpha-1}} v^{\overset{z(1-y)}{\beta-1}} e^{-\theta \overset{z}{(u+v)}} \mathbb{1}_D(u,v) \right]}_{f_X(u,v)} du dv$$

$$= \int_{\Delta} h(y,z) \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(y^{\alpha-1} z^{\alpha-1} \right) \left(z^{\beta-1} (1-y)^{\beta-1} \right) e^{-\theta z} \overset{|Jac|}{\downarrow} dz dy dz$$

$$\leadsto f_{Y'}(y,z) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha+\beta-1} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-\theta z} \mathbb{1}_{\Delta}(y,z)$$

On déduit $f_Y(y) = \int f_{Y,Z}(y,z) dz$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \int_0^{+\infty} \theta^{\alpha+\beta} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z} dz$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta) \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \theta^{\alpha+\beta} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z} dz}_{=1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

on a les paramètres α et β

On a aussi la densité de Z

Comme $f_{Y,Z}(y,z) = f_Y(y) \times \underbrace{\frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(z)}_{\text{densité de } Z}$

$\Rightarrow$ c'est la densité $f_Z(z)$ de Z

$\Rightarrow$ On a montré.

Prop. Si U, V v.a. indép de lois $\Gamma(\alpha, \theta)$, resp $\Gamma(\beta, \theta)$,

alors $U+V$ suit la loi $\Gamma(\alpha+\beta, \theta)$ et est indép de $\frac{U}{U+V}$

7 Fonction Caractéristique

→ on $\langle x, y \rangle$

$\forall n, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, on note (x, y) le produit scalaire de x et y

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Si $u \in \mathbb{R}^n$ et X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on peut considérer $e^{i(u, X)}$ comme une v.a. à valeurs complexes (dans $\mathbb{C}$) et $Y = \operatorname{Re} e^{i(u, X)}$, $Z = \operatorname{Im} e^{i(u, X)}$ sont des v.a. r.

Comme $|e^{i(u, X)}| = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$, Y et Z sont bornées donc intégrables

~ Il est naturel d'écrire l'espérance de $e^{i(u, X)}$ comme

$$E(e^{i(u, X)}) = E(Y) + i E(Z) = E(\cos(u, X)) + i E(\sin(u, X))$$

Def.. Si X est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,

sa fonction caractéristique est la fonction

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ u &\mapsto E(e^{i(u, X)}) = \int e^{i(u, x)} dP_X(x) \end{aligned}$$

ne dépend que de la loi de X . c'est la "transformée de Fourier" de P_X

Prop. ϕ_X est une fonction de module ≤ 1 , continue, et $\phi_X(0) = 1$

dém $\phi_X(0) = E(1) = 1$

¶ v a n Y , $E(Y)^2 \leq E(Y^2)$

$$\left(E(Y \cdot 1) \leq \sqrt{E(Y^2) E(1)} \right)$$

par Cauchy Schwarz

donc $|\phi_X(u)|^2 = \left[E(\cos(u, X)) \right]^2 + \left[E(\sin(u, X)) \right]^2$

$$\leq E(\underbrace{\cos^2(u, X) + \sin^2(u, X)}_{=1}) = 1.$$

Enfin, par la continuité, si $u_p \rightarrow u$, alors $e^{i(u_p, X)}$ CV simplement vers $e^{i(u, X)}$

et comme $|e^{i(u_p, X)}| \leq 1$, on a par CV dominée.
 $\hookrightarrow$ dans $\mathcal{L}^1$

$$\phi_X(u_p) = E(e^{i(u_p, X)}) \xrightarrow{p} E(e^{i(u, X)}) = \phi_X(u)$$

donc ϕ_X sur C^0

~~■~~

Prop. Si $|X|^m$ est dans $\mathcal{L}^1$, $m \in \mathbb{N}$, ($|\cdot|$ norme euclidienne)

alors ϕ_X est C^m sur $\mathbb{R}^n$ (m fois continûment différentiable),

et $\forall$ indices $i_1, \dots, i_m$

$$\frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} \phi_X(u) = i^m E\left(e^{i(u, X)} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_m}\right)$$

($X_1, \dots, X_n$: composantes de X)

En prenant $m = 0$, on peut calculer $E(X_{i_1} \dots X_{i_m})$ à partir des dérivées en 0 de la fonction caract. ϕ_X

Exemple. Si $n = 1$, $E(X) = -i \phi_X'(0)$, $E(X^2) = -\phi_X''(0)$, etc
 Si $X \in \mathcal{L}^1$ Si $X \in \mathcal{L}^2$

Dém. on suppose $m = 1$ (idem par $m \geq 2$, par réc)

Soit $v_j = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0)$ le j -ème vecteur de base de $\mathbb{R}^n$

$$\text{On a } \frac{\phi_X(u + t v_j) - \phi_X(u)}{t} = E \left(e^{i(u, X)} \frac{e^{itX_j} - 1}{t} \right)$$

Supposons $t_p \rightarrow 0$

Le r.a. $\frac{e^{it_p X_j} - 1}{t_p}$ CV simplement vers iX_j en étant bornée en module par $2|X_j| \in \mathcal{L}^1$

donc par le thm de CV dominée,

$$\frac{\phi_X(u+tv_j) - \phi_X(u)}{t} \text{ CV vers } i E(e^{i(u,X)} X_j) \text{ quand } t \rightarrow 0$$

On déduit que $\partial_{x_j} \phi_X$ existe et $= i E(e^{i(u,X)} X_j)$

De même que précédemment on m.q $\partial_{x_j} \phi_X$ est C^0 

Prop. Si X est une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$, et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matrice $m \times n$,

alors $\phi_{a+AX}(u) = e^{i(a,u)} \phi_X(Au), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

dém. on a $e^{i(u, a+AX)} = e^{i(u, a)} e^{i({}^t A u, X)}$ et on passe à l'espérance ■

Exemples.

① loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. $\phi(u) = (p e^{iu} + 1 - p)^n$

② loi de Poisson de paramètre θ $\phi(u) = e^{\theta(e^{iu} - 1)}$

③ loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. $\phi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$

④ loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. $X = m + \sigma Y$ où Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$
donc $\phi(u) = e^{i u m} e^{-\frac{u^2 \sigma^2}{2}}$

⑤ loi exp de paramètre θ . $\phi(u) = \frac{\theta}{\theta - iu}$

⑥ loi gamma $\Gamma(\alpha, \theta)$. $\phi(u) = \frac{\theta^\alpha}{(\theta - iu)^\alpha}$

⑦ loi uniforme sur $[a, b]$. $\phi(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{iux} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{iux}}{iu} \right]_a^b$

$$= \frac{1}{b-a} \times \frac{e^{iub} - e^{iaa}}{iu}$$

$$= \frac{e^{iua + \frac{ib-a}{2}}}{b-a} \times \frac{\mathcal{L}i \sin\left(u \frac{b-a}{2}\right)}{iu}$$

$$= \frac{\sin\left(u \cdot \frac{b-a}{2}\right)}{u \cdot \frac{b-a}{2}} e^{i u \cdot \frac{a+b}{2}}$$

Théorème la fonction caractéristique ϕ_X caractérise la loi de la v.a. X

dém... pour $\sigma > 0$, on considère

$$f_\sigma : x \mapsto \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-|x|^2/(2\sigma^2)}, \quad f_\sigma : u \mapsto e^{-|u|^2 \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} G_n &= \int f_\sigma(x) e^{i \langle u, x \rangle} dx = \int \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_j^2}{2\sigma^2} + i u_j x_j\right) \right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \prod_{j=1}^n \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2} + i u_j t\right) dt \end{aligned}$$

$$E(e^{i n_j Y}) = \phi_Y(n_j) \text{ où } Y \text{ est de loi}$$

$$= e^{-\frac{n_j^2 \sigma^2}{2}} \text{ d'après l'exemple (4) ci-dessus } dP(0, \sigma^2)$$

$$\text{donc } \int f_\sigma(x) e^{i(n, x)} dx = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{n_j^2 \sigma^2}{2}} = e^{-\frac{|n|^2 \sigma^2}{2}} = \hat{f}_\sigma(n)$$

$$\text{Donc } f_\sigma(u-v) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \int f_\sigma(x) e^{i(u-v, x)/\sigma^2} dx$$

$$\stackrel{||}{=} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \hat{f}_\sigma\left(\frac{u-v}{\sigma^2}\right)$$

Supposons que X et X' admettent la même fonction carac. $\phi_X = \phi_{X'}$

$$\begin{aligned} \text{Alors } E(f_\sigma(X-v)) &= E\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \int f_\sigma(x) e^{-i(x-v, x)/\sigma^2} dx\right) \\ &= \int f_\sigma(x) \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \phi_X\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) e^{-i(v, x)/\sigma^2} dx \end{aligned}$$

et idem pour X'

$$\text{Donc } E(f_\sigma(X-v)) = E(f_\sigma(X'-v)),$$

i.e. $E(h(X)) = E(h(X'))$ pour toute fonction h de la forme $u \mapsto f_\sigma(u-v)$

donc aussi $\forall$ fonction h dans l'espace vectoriel engendré par ces fonctions $v \in \mathbb{R}, \sigma > 0$,

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, cet espace vectoriel est dense
dans l'ensemble C_0 des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ de limite nulle à l'infini (par la CV uniforme)

$$\Rightarrow E(h(x)) = E(h(x')), \quad \forall h \in C_0$$

Comme l'indicatrice d'un ouvert U quelconque est limite croissante de
 $\left(\mathbb{1}_{U \cap]-k, k[}^n \right)_{k \geq 0} \in C_0^{\mathbb{N}}$, on déduit que $\forall U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$P_X(U) = P(X \in U) = E(\mathbb{1}_U(X)) = E(\mathbb{1}_U(X')) = P(X' \in U) = P_{X'}(U),$$

donc $P_X = P_{X'}$



Exercice. Si la v.a. X (dans $\mathbb{R}^n$) satisfait $\phi_X \in \mathcal{L}'(\lambda)$ /
 $\hookrightarrow$ mes. de Lebesgue

alors $P_X = f \cdot \lambda$, où

$$f: x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i(u,x)} \phi_X(u) du.$$

dém. soit $f_\sigma, \hat{f}_\sigma$ comme ci-dessus.

$$f_\sigma \cdot x \mapsto \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-|x|^2/(2\sigma^2)}, \quad \hat{f}_\sigma \cdot u \mapsto e^{-|u|^2 \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\text{On a } f_\sigma(\sigma^2 u) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \hat{f}_\sigma(u)$$

$$\text{or si } \phi_X \in \mathcal{L}' \text{ alors } f_\sigma(\sigma^2 u) \phi_X(t) \in \mathcal{L}'(\lambda \otimes \lambda)$$

On a vu

$$E(f_\sigma(X-v)) = \int f_\sigma(x) \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \phi_x\left(\frac{t}{\sigma^2}\right) e^{-i(v,x)/\sigma^2} d_x \overset{\sigma^{2n} dt}{\uparrow}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \underbrace{f_\sigma(\sigma^2 t)}_{\text{change of variable}} e^{-i(v,t)} \phi_x(t) dt$$

$$= (2\pi)^{-n} \int e^{-i(v,t)} \phi_x(t) \int e^{i(u,t)} f_\sigma(u) du dt$$

$$= (2\pi)^{-n} \int f_\sigma(u) \int e^{i(u-v,t)} \phi_x(t) dt du$$

$$= (2\pi)^{-n} \int f_\sigma(x-v) \int e^{-i(x,t)} \phi_x(t) dt dx$$

$(u-v = -x)$
 $\int f_\sigma(x-v) - \int f_\sigma(v-x)$

$$d'o\grave{u} \quad E(h(X-v)) = \int h(x-v) \left(\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i(x,t)} \phi_x(t) dt}_{\text{densité de } P_X} \right) dx$$

$\forall h \in C_0$

(on argumente $\bar{c}$ ci-dessus par Stone-Weierstrass)



théorème Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Pour que les composantes $X_1, \dots, X_n$ soient indépendantes,

il faut et il suffit que

$$(*) \quad \phi_X(u_1, \dots, u_n) = \phi_{X_1}(u_1) \cdots \phi_{X_n}(u_n), \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

dém. $\Rightarrow$ Si les v.a.n $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes,

$$\phi_X(\underbrace{u_1, \dots, u_n}_u) = E\left(e^{i(u, X)}\right) \\ = E\left(e^{i \sum_{j=1}^n u_j X_j}\right) = E\left(e^{i u_1 X_1} \cdots e^{i u_n X_n}\right)$$

$$= E\left(e^{i u_1 X_1}\right) \cdots E\left(e^{i u_n X_n}\right)$$

car $e^{i u_1 X_1}, \dots, e^{i u_n X_n}$ sont des v.g.n. indépendantes

⇐ Supposons qu'on ait (*) On peut construire des v.a. indépendantes

$X'_1, \dots, X'_n$ t.q. X_j et X'_j ont même loi pour tout $j=1, \dots, n$

En particulier, $\phi_{X_j} = \phi_{X'_j}$

$$(X' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_n))$$

Les v.a. X et X' ont donc tous deux comme fonction caract.

$$\phi_X = \prod_{j=1}^n \phi_{X_j}$$

$$(\phi_{X'} = \prod_{j=1}^n \phi_{X'_j} = \prod_{j=1}^n \phi_{X_j} \text{ d'après } \Rightarrow)$$

et donc même loi (car la fonction caractéristique caractérise la loi).

On déduit que pour tous boréliens $(A_j)_j$,

$$P\left(\bigcap_j \{X_j \in A_j\}\right)$$

$$= P\left(\bigcap_j \{X'_j \in A_j\}\right) = \prod_j P\left(\{X'_j \in A_j\}\right) = \prod_j P\left(\{X_j \in A_j\}\right)$$

d'où l'indépendance des X_j

~~■~~

Prop. Si X, Y sont deux v. i. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,

alors $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$

dém.

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(u) &= E\left(e^{i\langle u, X+Y \rangle}\right) = E\left(e^{i\langle u, X \rangle} e^{i\langle u, Y \rangle}\right) \stackrel{\text{ indép. }}{=} E\left(e^{i\langle u, X \rangle}\right) E\left(e^{i\langle u, Y \rangle}\right) \\ &= \phi_X(u) \phi_Y(u) \quad \blacksquare \end{aligned}$$